

La théorie des nœuds

Fathi Ben Aribi

Sorbonne Université (Paris) - IMJ-PRG - INSPE Paris

Pi DAY Lycée Louis-Le-Grand
14 mars 2025

Nœud : Trajectoire d'une **ficelle** dans l'**espace**, dont on **recolle** ensuite les **bouts**.

Nœud : Trajectoire d'une **ficelle** dans l'**espace**, dont on **recolle** ensuite les **bouts**.

On veut **classer** les nœuds, à **déformation** de la ficelle près, en gardant les bouts **joints**.

Les nœuds en mathématiques

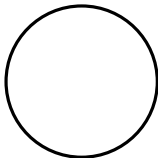
Nœud : Trajectoire d'une **ficelle** dans l'**espace**, dont on **recolle** ensuite les **bouts**.

On veut **classer** les nœuds, à **déformation** de la ficelle près, en gardant les bouts **joint**s.

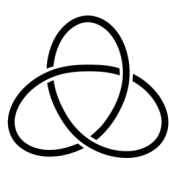
Dessins de nœuds



=



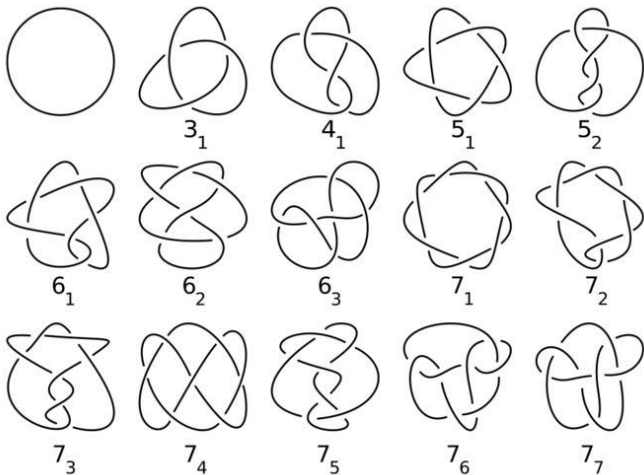
≠



Nœud trivial

Nœud de trèfle

Table de classification des nœuds



... et bien d'autres encore !

L'origine physico-chimique de la théorie des nœuds

Source : Wikipedia - Vortex theory of the atom

Fin 19e siècle: **Lord Kelvin** propose l'idée que les **atomes** sont des **tourbillons** dans un fluide qui remplit tout l'univers (l'**éther**).

L'origine physico-chimique de la théorie des nœuds

Source : Wikipedia - Vortex theory of the atom

Fin 19e siècle: **Lord Kelvin** propose l'idée que les **atomes** sont des **tourbillons** dans un fluide qui remplit tout l'univers (l'**éther**).

→ Pour **classifier** les **atomes**, il suffit donc de classifier les **nœuds**!

Source : Wikipedia - Vortex theory of the atom

Fin 19e siècle: **Lord Kelvin** propose l'idée que les **atomes** sont des **tourbillons** dans un fluide qui remplit tout l'univers (l'**éther**).

→ Pour **classifier** les **atomes**, il suffit donc de classifier les **nœuds**!

→ **Tait** et **Little** commencent à **classifier** les nœuds, jusqu'à 10 croisements.



L'origine physico-chimique de la théorie des nœuds

Source : Wikipedia - Vortex theory of the atom

Fin 19e siècle: **Lord Kelvin** propose l'idée que les **atomes** sont des **tourbillons** dans un fluide qui remplit tout l'univers (l'**éther**).

→ Pour **classifier** les **atomes**, il suffit donc de classifier les **nœuds**!

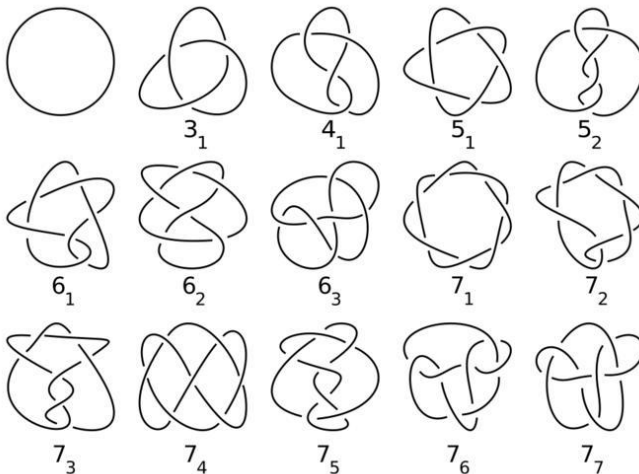
→ **Tait** et **Little** commencent à **classifier** les nœuds, jusqu'à 10 croisements.

Michelson-Morley 1887 prouvent que... **L'éther n'existe pas !**

Pas grave ! Les **mathématiciens** ont pris le relais entretemps, et la **théorie des nœuds** est lancée.

Défi n°1 : Mon nœud en 5 secondes

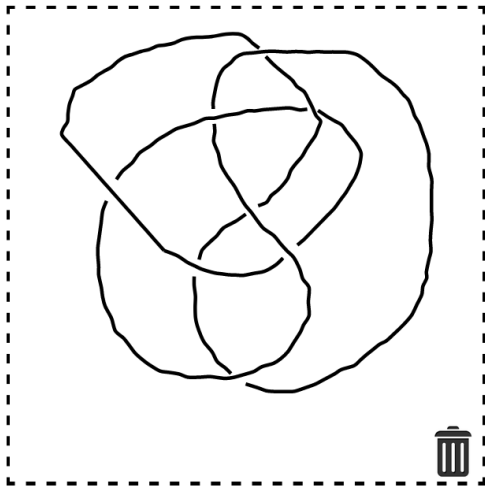
En 5 secondes, feras-tu un de ces nœuds, ou un **pas dans la table**?



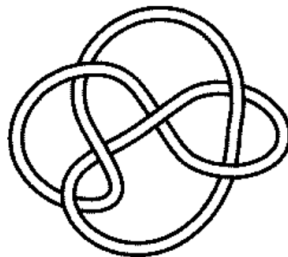
Reconnaître un nœud avec l'ordinateur

<https://joshuahhh.com/projects/kit/>

knot identification tool



Alexander polynomial: $1, -3, 5, -3, 1$



6_3

by [Joshua Horowitz](#)

Un **dessin de nœud** est fait de **traits** et de **croisements**.

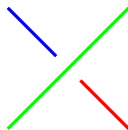
Les règles du tricoloriage

Un **dessin de nœud** est fait de **traits** et de **croisements**.

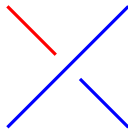
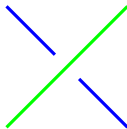
On choisit **trois couleurs** (par exemple **Rouge**, **Vert**, **Bleu**).

Tricoloriage d'un dessin de nœud = **Coloriage des traits** tel que:

AUTORISÉ : **une** ou **trois** couleurs à un croisement



INTERDIT : deux couleurs à un croisement



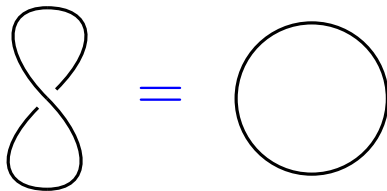
Les invariants de nœuds

Invariant de nœud = objet mathématique associé à un nœud,
inchangé si on **bouge la ficelle** ou on prend **un autre dessin!**

Les invariants de nœuds

Invariant de nœud = objet mathématique associé à un nœud, **inchangé** si on **bouge la ficelle** ou on prend **un autre dessin**!

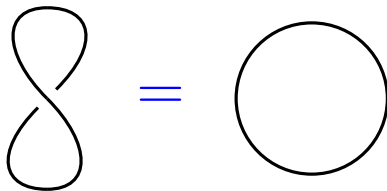
Contre-Exemple : Le **nombre de croisements d'un dessin** n'est **PAS** un invariant (on peut rajouter des boucles à un nœud !)



Les invariants de nœuds

Invariant de nœud = objet mathématique associé à un nœud, **inchangé** si on **bouge la ficelle** ou on prend **un autre dessin**!

Contre-Exemple : Le **nombre de croisements d'un dessin** n'est **PAS** un invariant (on peut rajouter des boucles à un nœud !)

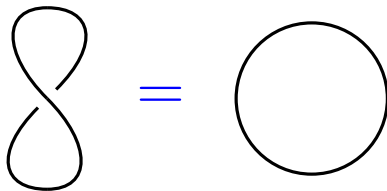


Exemple : Le **minimum du nombre de croisements** parmi **tous les dessins**... c'est un invariant !

Les invariants de nœuds

Invariant de nœud = objet mathématique associé à un nœud, **inchangé** si on **bouge la ficelle** ou on prend **un autre dessin**!

Contre-Exemple : Le **nombre de croisements d'un dessin** n'est **PAS** un invariant (on peut rajouter des boucles à un nœud !)



Exemple : Le **minimum du nombre de croisements** parmi **tous les dessins**... c'est un invariant !

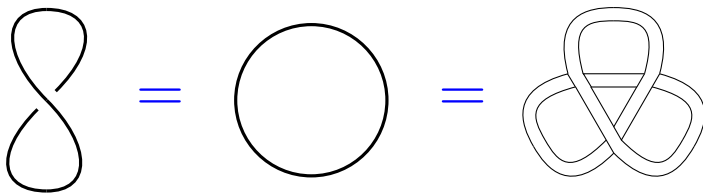
Exemple : Le **nombre de tricoloriages** d'un **quelconque dessin** du nœud est un **invariant du nœud**! (pas évident, admis ici)

Distinguer les nœuds par le nombre de tricoloriages

Un **invariant** permet de **différencier deux nœuds**.

Distinguer les nœuds par le nombre de tricoloriages

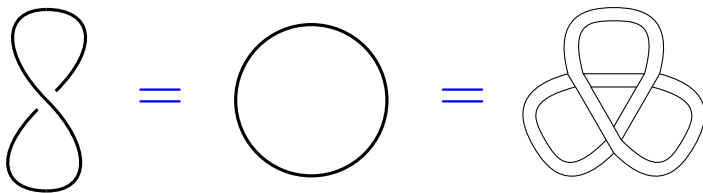
Un **invariant** permet de **différencier deux nœuds**.



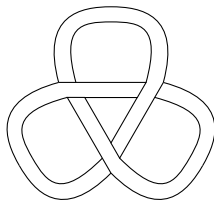
Nœud trivial : 3 tricoloriages possibles.

Distinguer les nœuds par le nombre de tricoloriages

Un **invariant** permet de **différencier deux nœuds**.



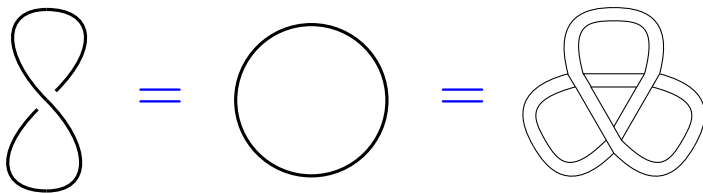
Nœud trivial : **3** tricoloriages possibles.



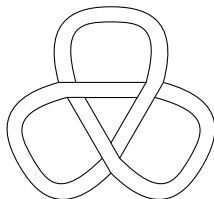
Nœud de trèfle : **9** tricoloriages possibles.

Distinguer les nœuds par le nombre de tricoloriages

Un **invariant** permet de **différencier deux nœuds**.



Nœud trivial : **3** tricoloriages possibles.



Nœud de trèfle : **9** tricoloriages possibles.

→ Ce sont **deux nœuds différents**!

<https://knotinfo.math.indiana.edu/>

KnotInfo: Table of Knots Search Results

Export to CSV

Name	Fibered	Genus	Alexander	Volume
<u>3_1</u>	Y	1	$1-t+t^2$	0
<u>4_1</u>	Y	1	$1-3t+t^2$	2.029883213
<u>5_1</u>	Y	2	$1-t+t^2-t^3+t^4$	0
<u>5_2</u>	N	1	$2-3t+2t^2$	2.828122088
<u>6_1</u>	N	1	$2-5t+2t^2$	3.163963229
<u>6_2</u>	Y	2	$1-3t+3t^2-3t^3+t^4$	4.400832516
<u>6_3</u>	Y	2	$1-3t+5t^2-3t^3+t^4$	5.693021091
<u>7_1</u>	Y	3	$1-t+t^2-t^3+t^4-t^5+t^6$	0

Ma recherche : étudier et calculer divers invariants de nœuds.

Plus d'un siècle de théorie des nœuds

Née de la **Physique** (XIX^e siècle), pour classer les **atomes**.

Développée en **Mathématiques** (XX^e – XXI^e siècles).

Appliquée en **Biologie** (années 1990) pour étudier **l'ADN**.

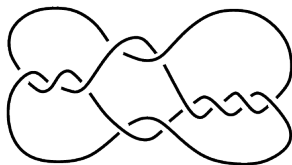


Des nœuds dans l'ADN **empêchent la division cellulaire**.

→ Recherche de **traitements** contre les **cancers**.

Merci de votre attention !

Avez-vous des questions ?



(Bonus : prouvez que c'est un dessin du nœud trivial !)